Voorbeeldoplossing veeltermfuncties & rationale functies

1. Theorie

2. We ontbinden met Horner:

	2	-6	a+4	-a
1		2	-4	a
	2	-4	a	0

Dus $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + (a+4)x - a = (x-1)(2x^2 - 4x + a)$.

Als f maar één nulpunt mag hebben, dan mag $2x^2 - 4x + a$ enkel ook nog $x = 1$ als nulpunt hebben. Dus moet alleszins al $\Delta \leq 0$.

$\Delta = 16 - 8a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$. Als $a > 2$ heeft $f(x)$ slechts één enkelvoudig nulpunt, namelijk $x = 1$.

Als $a = 2$, dan is $f(x) = (x-1)(2x^2 - 4x + 2) = 2(x-1)^3$, dus ook in dat geval heeft f maar één nulpunt (met multipliciteit 3), namelijk $x = 1$.

3. $$f(x) = \frac{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{-(x-1)(2x-1)(3x-1)}{(3x-1)(x-2)} \Rightarrow f_v(x) = \frac{-(x-1)(2x-1)}{x-2} = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x-2}$$

Er is dus een perforatiepunt bij $x = 1/3$, dan is $f_v\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-2(1/3)^2 + 3(1/3) - 1}{1/3 - 2} = \frac{-2/9}{-5/3} = \frac{2}{15} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{15}\right)$.

De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = 2$, en qua ligging geldt: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		$1/2$		1		2		$+\infty$
$f_v(x)$		+	0	-	0	+	|	-	

Er is ook een schuine asymptoot, want $gr(T) = gr(N) + 1$. De vergelijking is $y = -2x - 1$, want:

$$\begin{array}{ccc|cc}
-2x^2 & +3x & -1 & x & -2 \\
\cline{4-5}
-2x^2 & +4x & & -2x & -1 \\
\cline{1-3}
 & -x & -1 & & \\
 & -x & +2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -3 & &
\end{array}$$

Ligging: tekenverloop van $f_v(x) + 2x + 1 = \frac{-3}{x-2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_v(x) + 2x + 1$		+	|	-	
		Boven SA		Onder SA	

4. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{(a^2 - 1)x^2 + (a+1)x - 6}{x - 1}$, met parameter $a \in \mathbb{R}$.

   a) Dan moet $gr(T) \leq gr(N) \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \ \vee \ a = -1$

   $a = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x - 6}{x - 1}$, de horizontale asymptoot is dan $h \leftrightarrow y = 2$

   $a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-6}{x - 1}$, de horizontale asymptoot is dan $h \leftrightarrow y = 0$

   b) Dan moet 1 ook een nulpunt zijn van de teller $\Rightarrow a^2 - 1 + a + 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \ \vee \ a = -3$

   c) Als $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$, de verticale asymptoot is dan $v \leftrightarrow x = 1$.

5. Bij tekenverloop D is er één nulpunt met een even multipliciteit. Dit is onmogelijk bij een derdegraadsveelterm.